УДК 517.11

Д.А.Зайцев, В.Г.Сарбей, А.И.Слепцов

СИНТЕЗ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОИ ЛОГИКИ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО

Одним из способов представления функций непрерывной логики является таблица выбора [1]. Задачи синтеза функции по таблицам выбора возникают при проектировании гибридных [2] и аналоговых [3] вычислительных устройств, а также в других областях применения непрерывной логики, обзор которых представлен в [4]. Структура исходной таблицы при этом определяется внешними спецификациями проектируемого устройства либо узла.

Известны алгоритмы синтеза функций непрерывной логики по таблицам выбора специального вида, например, по таблицам упорядоченного выбора [3]. В [4] отмечено, что общий алгоритм синтеза функции непрерывной логики по произвольной таблице выбора неизвестен.

В настоящей работе получен критерий, позволяющий определить, задает ли таблица выбора некоторую функцию непрерывной логики и построен простой алгоритм, выполняющий синтез функции по таблице.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В соответствии с [4] определим алгебру непрерывной логики как квазибулеву алгебру $\Delta=(C,\&,\mid,\bar{\ })$, где $C=[A,B]$ – непрерывный отрезок множества вещественных чисел с заданным на нем обычным образом отношением линейного порядка $\leqslant$; $M=(A+B)/2$ – середина отрезка, называемая медианой. Базовые операции конъюнкции "&", дизъюнкции "¦"

и отрицания "$^{-}$" вводятся для любых $x,y \in C$ следующим образом:

$$x \& y = \min(x,\ y), \quad x \mid y = \max(x,\ y), \quad \bar{x} = 2M - x. \qquad (1)$$

Отрезок C рассматривается как множество допустимых значений степени истинности логических переменных; при этом A представляет значение степени истинности абсолютно ложного высказывания, а B – значение степени истинности абсолютно истинного высказывания. Через базовые операции (1) можно ввести дополнительные операции, используемые в традиционной логике: импликацию, эквивалентность, исключающую дизъюнкцию и другие. Знак операции конъюнкции далее в формулах алгебры непрерывной логики будем опускать.

Функцией непрерывной логики (ФНЛ) будем называть любую функцию $f\colon C^n \to C$, образованную путем суперпозиции конечного числа базовых операций, примененных к независимым переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n \in C$.

Из определений базовых операций (1) следует, что ФНЛ всегда принимает значение одного из своих аргументов либо его отрицания. Кроме того, значение функции полностью определяется способом упорядочения аргументов и их отрицаний с помощью отношения $\leqslant$. Таким образом, произвольная ФНЛ может быть однозначно представлена таблицей, в которой перечислены все варианты упорядочения аргументов и их отрицаний и указаны значения функции для каждого варианта. Такие таблицы, в соответствии с [4], будем называть таблицами выбора. В табл. I представлена таблица выбора для функции $f = x_1 \mid x_2 \bar{x}_2$.

Квазибулева алгебра Δ является дистрибутивной решеткой с псевдодополнениями [2]; в ней выполняется большинство законов, характерных для двоичной логики [4]: коммутативный, ассоциативный, дистрибутивный, Де-Моргана, Клини, поглощения, двойного отрицания, идемпотентности элементов. Справедливость указанных законов может быть установлена, например, с помощью таблиц выбора. Особенностью непрерывной логики является невыполнение законов исключения третьего и противоречия: $x|\bar{x}\neq B$, $x\&\bar{x}\neq A$.

В качестве стандартных форм ФНЛ принимают дизъюнктивные (ДНФ) и конъюнктивные (КНФ) нормальные формы [4]. В отличии от аналогичных форм функций двоичной логики элементарные конъюнкты (дизъюнкты) могут вместе с аргументом x_i содержать и его отрицание $\bar{x}_i$. Из основных законов непрерывной логики следует, что любая ФНЛ может быть представлена в дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальной форме.

Заметим, что способ определения алгебры непрерывной логики как квазибулевой алгебры Δ является в настоящее время наиболее распространенным [2,3,4], но не единственным. Так, в бесконечнозначной логике Мак-Нотона [5] использованы две базисные операции отрицания и влечения, причем результат операции влечения в общем случае не совпадает со значением одного из аргументов либо отрицанием аргумента.

ТАБЛИЧНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ

Как было отмечено ранее, любая ФНЛ может быть однозначно представлена соответствующей таблицей выбора. Всего существует $(2n)!$ способов упорядочения n аргументов и их отрицаний. Однако, значения переменной x_i и ее отрицания $\bar{x}_i$ симметричны относительно медианы M, т.е. $x_i \leqslant x_j$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}_j \leqslant \bar{x}_i$. Таким образом, общее число строк таблицы выбора функции n аргументов [2] равно $L=2^n n!$. Для каждого варианта упорядочения функция может принимать независимо одно из 2n возможных значений. Поэтому существует $N=(2n)^L$ различных таблиц выбора, задающих некоторую функцию n аргументов.

В работах [2,4] получены оценки количества различных ФНЛ одного, двух и трех аргументов. В табл. 2 эти значения сопоставлены с количествами различных таблиц выбора для соответствующего числа аргументов. Так как в [2,4] при подсчете учитывались также функции, принимающие значения A и B, количество таблиц выбора вычислялось по формуле $N=(2n+2)^{L}$. Рассмотрение табл.2 позволяет сделать вывод, что лишь немногие из функций, задаваемых таблицами выбора, являются функциями непрерывной логики.

Во избежание использования в дальнейшем изложении нескольких уровней индексов введем следующий способ представления таблиц выбора. Пусть $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ – набор аргументов и переменные x_i с индексами i в пределах от n+1 до 2n обозначают отрицания аргументов: $x_i=\bar{x}_{i-n}$ для $i=\overline{n+1,m}$, где $m=2n$. Таблицу выбора T будем рассматривать как множество строк $T=\{t\}$, $|T|=L$; $t=(p,a)$ – строка таблицы, $p=(i_1,i_2,\dots,i_m)$ – последовательность индексов аргументов в описываемом варианте упорядочения, a – индекс аргумента, являющегося значением функции. Таким образом:

$$f(\mathbf{x})=x_a \quad \text{при } \mathbf{x}\in D_t\,,$$

где область $D_t\subseteq C^n$ задается неравенством $x_{i_1}\leqslant x_{i_2}\leqslant\dots\leqslant x_{i_m}$.

Будем говорить, что строка t таблицы выбора T перекрывает строку t′, если для подмножеств индексов Φ_t и $\tilde{\Phi}_{t'}$ имеет место включение $\Phi_t\subseteq\tilde{\Phi}_{t'}$, где

$$\begin{aligned}
t&=((i_1,\dots,i_{k-1},a,i_{k+1},\dots,i_m),a),\\
t'&=((j_1,\dots,j_{l-1},b,j_{l+1},\dots,j_m),b),\\
\Phi_t&=\{a,i_{k+1},\dots,i_m\}\ (x_a\leqslant x_i \text{ для } \forall i\in\Phi_t),\\
\tilde{\Phi}_{t'}&=\Phi_{t'}\setminus\{b\}=\{j_{l+1},\dots,j_m\}.
\end{aligned}\qquad(2)$$

Строки t и t′ таблицы выбора T будем называть перекрывающимися, если одна из них перекрывает другую.

Теорема I. Таблица выбора, задающая функцию непрерывной логики, не содержит перекрывающихся строк.

Доказательство. Выберем произвольно функцию непрерывной логики f. Не ограничивая общности, можно считать, что функция f представлена в дизъюнктивной нормальной форме:

$$f(\mathbf{x}) = \bigvee_{q} K_q, \tag{3}$$

где $K_q = \bigwedge_{i \in I_q} x_i$ – элементарные конъюнкты,

I_q – множество индексов i переменных x_i, входящих в q-й конъюнкт.

Построим таблицу выбора T для функции f. Предположим, что в таблице T некоторая строка t перекрывает строку t′, т.е. $\Phi_t \subseteq \tilde{\Phi}_{t'}$ в соответствии с (2). Пусть наборы аргументов $\mathbf{x} \in D_t$ и $\mathbf{x}' \in D_{t'}$ удовлетворяют строкам t и t′ таблицы T соответственно в смысле строгого выполнения неравенств.

Так как $f(\mathbf{x}) = x_a$, то по определению дизъюнкции как максимума значений аргументов, по крайней мере один из конъюнктов ДНФ (3) на наборе **x** примет значение x_a. Пусть это будет конъюнкт K_u:

$$K_u = \bigwedge_{i \in I_u} x_i, \quad K_u(\mathbf{x}) = x_a.$$

Тогда по определению конъюнкции как минимума значений аргументов, имеем $I_u \subseteq \Phi_t$ и далее из $\Phi_t \subseteq \tilde{\Phi}_{t'}$ заключаем

$$I_u \subseteq \tilde{\Phi}_{t'}. \tag{4}$$

Рассмотрим значение конъюнкта K_u на наборе $\mathbf{x}'$. Так как $f(\mathbf{x}') = x_b$, то $K_u(\mathbf{x}') \leqslant x_b$, значит, существует $j \in I_u$ такое, что $x_j \leqslant x_b$, следовательно $j \notin \tilde{\Phi}_{t'}$. Таким образом имеем

$$I_u \sqsubseteq \tilde{\Phi}_{t'}. \tag{5}$$

Сопоставляя (4) и (5), приходим к противоречию, что и доказывает невозможность присутствия в таблице выбора, задающей ФНЛ, перекрывающихся строк.

СИНТЕЗ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛОГИКИ ПО ТАБЛИЦАМ ВЫБОРА

Пусть задана таблица выбора T, не содержащая перекрывающихся строк. Построим алгоритм, позволяющий выполнить синтез ФНЛ по таблице T.

Конституэнтой максимума строки t таблицы T будем называть конъюнкт

$$\phi_t = \bigwedge_{i\in\Phi_t} x_i, \quad (x_a \leqslant x_i \text{ для } \forall i\in\Phi_i). \qquad (6)$$

Из определения (6) вытекает стедующее свойство конституэнт: для любого набора аргументов $\mathbf{x}$, удовлетворяющего строке t ($\mathbf{x}\in D_t$)

$$\phi_t(\mathbf{x}) = x_a. \qquad (7)$$

Лемма I. Для двух неперекрывающихся строк t и t′ таблицы выбора T и для набора аргументов $\mathbf{x}'$, удовлетворяющего t′ ($\mathbf{x}'\in D_{t'}$) выполняется неравенство

$$\phi_t(\mathbf{x}') \leqslant \phi_{t'}(\mathbf{x}'). \qquad (8)$$

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\phi_t(\mathbf{x}') > \phi_{t'}(\mathbf{x}')$. По свойству конституэнт максимума (7) имеем

$$\phi_{t'}(\mathbf{x}') = x_b.$$

Тогда

$$x_b < \bigwedge_{i\in\Phi_t} x_i,$$

или, по определению конъюнкции как минимума значений аргументов,

$$x_b < x_i \text{ для } \forall i\in\Phi_t. \qquad (9)$$

Множество $\tilde{\Phi}_{t'}$ в силу определения (2) составляют такие индексы j аргументов, что

$$x_b \leqslant x_j \text{ для } \forall j\in\tilde{\Phi}_{t'}. \qquad (10)$$

Тогда, сопоставляя (9) и (10), имеем $\Phi_t \subseteq \tilde{\Phi}_{t'}$. Таким образом, строка t таблицы T перекрывает строку t′. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Теорема 2. Произвольная таблица выбора T, не содержащая перекрывающихся строк, задает функцию непрерывной логики, равную дизъюнкции конституэнт максимума строк таблицы.

Доказательство. В силу определения конституэнты максимума (6) для любой таблицы выбора T можно построить функцию

$$f(\mathbf{x})=\bigvee_{t\in T}\phi_t. \qquad (11)$$

Так как таблица T не содержит перекрывающихся строк, то конституэнты ϕ_t обладают свойствами (7) и (8). Рассмотрим значение функции f на произвольном наборе аргументов $\mathbf{x}'\in C^n$. Любой набор аргументов всегда удовлетворяет одной из строк таблицы T. Пусть набор $\mathbf{x}'$ удовлетворяет строке t′ ($\mathbf{x}'\in D_{t'}$). Тогда

$$\phi_{t'}(\mathbf{x}')=x_b \text{ и для } \forall t\in T,\ t\neq t':\ \phi_t(\mathbf{x}')\leqslant x_b.$$

Поэтому, в силу определения дизъюнкции как максимума значений аргументов

$$f(\mathbf{x}')=\bigvee_{t\in T}\phi_t=x_b.$$

Следовательно, значение функции f, заданной соотношением (11) совпадает со значением, определяемым таблицей выбора T. В силу произвольности выбора набора аргументов $\mathbf{x}'$ значения совпадают для $\forall\mathbf{x}'\in C^n$.

Теорема доказана.

Аналогичным образом можно ввести конституэнты минимума строк таблицы T:

$$\psi_t=\bigvee_{i\in\Psi_t}x_i\ ,\text{ где }\Psi=\{i_1,\dots,i_{k-1},a\}\ (x_i\leqslant x_a \text{ для } \forall i\in\Psi). \qquad (12)$$

Тогда теорему 2 можно представить в двойственной форме, определяющей ФНЛ как конъюнкцию конституэнт минимума строк таблицы:

$$f(\mathbf{x})=\bigwedge_{t\in T}\psi_t. \qquad (13)$$

Теорема 3. Таблица выбора задает функцию непрерывной логики тогда и только тогда, когда не содержит перекрывающихся строк (теорема является непосредственным следствием теорем I и 2.).

По теореме 2 алгоритм синтеза ФНЛ по таблице выбора состоит в последовательном выполнении двух шагов:

Шаг I. Построить конституэнты минимума (6) (максимума (12)) строк таблицы.

Шаг 2. Построить ДНФ (КНФ) функции как дизъюнкцию (11) (конъюнкцию (13)) конституэнт максимума (минимума).

Средний размер конституэнты равен n ($n=m/2$). Поэтому общая сложность алгоритма имеет порядок $o(L\cdot n)$. Для минимизации полученной функции необходимо использовать методы, изложенные в [2]. Размер строящейся ДНФ (КНФ) можно сократить, если совместить выполнение шагов I и 2 алгоритма с применением законов поглощения:

$$x\mid(xy)=x,\quad x(x\mid y)=x.$$

Непосредственный поиск перекрывающихся строк (2) в таблице выбора требует выполнения проверок для каждой из L^2-L пар различных строк. Однако, в силу определений конституэнт и дизъюнктивной (конъюнктивной) нормальных форм, алгоритм позволяет выполнить синтез функции и для таблиц, содержащих перекрывающиеся строки. В этом случае значения полученной функции на наборах аргументов, удовлетворяющих перекрывающимся строкам, будут отличаться от значений, указанных в таблице выбора.

Этот факт можно использовать для практического синтеза функций. Не проверяя предварительно таблицу выбора T на наличие перекрывающихся строк, выполним синтез ДНФ (КНФ) f функции непрерывной логики. Затем построим таблицу выбора T' функции f. Если T и T' совпадут, то исходная таблица задает ФНЛ f. В противном случае функция, задаваемая таблицей T, не является функцией непрерывной логики. Для аналитического представления таких функций необходимо использовать гибридную логику [3] либо предикатную алгебру выбора [4].

В предикатной алгебре выбора с помощью полученного алгоритма строим последовательность ФНЛ. Для этого повторяем алгоритм для тех строк таблицы, на которых значение построенной функции не совпало с исходным. Каждая ФНЛ задает исходную функцию на подмножестве наборов, не содержащем перекрывающихся строк. Вопросы нахождения оптимального с точки зрения практически значимых критериев разбиения связаны с общими вопросами минимизации функций предикатной алгебры выбора и выходят за рамки настоящей работы.

ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА ФУНКЦИИ

Пусть функции F_1 и F_2 двух аргументов заданы таблицами выбора T_1 и T_2 соответственно, где

T_1={ ((1,2,4,3),2), ((1,4,2,3),2), ((3,2,4,1),4), ((3,4,2,1),4), ((2,1,3,4),1), ((2,3,1,4),1), ((4,1,3,2),3), ((4,3,1,2),3) };

T_2={ ((1,2,4,3),2), ((1,4,2,3),3), ((3,2,4,1),2), ((3,4,2,1),4), ((2,1,3,4),1), ((2,3,1,4),3), ((4,1,3,2),4), ((4,3,1,2),3) }.

Табл. 3 содержит представление F_1 и F_2 в наглядной форме. Выполним синтез указанных функций.

Конституэнты максимума функции F_1 имеют вид:

$$\phi_1=x_2\bar{x}_2\bar{x}_1,\ \phi_2=x_2\bar{x}_1,\ \phi_3=\bar{x}_2x_1,\ \phi_4=\bar{x}_2x_2x_1,$$

$$\phi_5=x_1\bar{x}_1\bar{x}_2,\ \phi_6=x_1\bar{x}_2,\ \phi_7=\bar{x}_1x_2,\ \phi_8=\bar{x}_1x_1x_2.$$

В силу коммутативности операции конъюнкции, ϕ_7 равна ϕ_2; ϕ_6 равна ϕ_3; ϕ_2 поглощает ϕ_1 и ϕ_8; ϕ_3 поглощает ϕ_4 и ϕ_5. Таким образом, получим ДНФ

$$f_1=\phi_2 \mid \phi_3=x_1\bar{x}_2 \mid \bar{x}_1x_2.$$

Таблица функции f_1 совпадает с таблицей функции F_1 (табл. 3). Таким образом, F_1 является функцией непрерывной логики, а f_1 – ее дизъюнктивная нормальная форма. Отсутствие перекрывающихся строк в таблице T_1 можно установить также путем непосредственной проверки.

Построим конституэнты максимума функции F_2:

$$\phi_1=x_2\bar{x}_2\bar{x}_1,\ \phi_2=\bar{x}_1,\ \phi_3=x_2\bar{x}_2x_1,\ \phi_4=\bar{x}_2x_2x_1,$$
$$\phi_5=x_1\bar{x}_1\bar{x}_2,\ \phi_6=\bar{x}_1x_1\bar{x}_2,\ \phi_7=\bar{x}_2x_1\bar{x}_1x_2,\ \phi_8=\bar{x}_1x_1x_2.$$

Конституэнта ϕ_3 равна ϕ_4; ϕ_5 равна ϕ_6; ϕ_2 поглощает ϕ_1, ϕ_5, ϕ_7, ϕ_8. Построим ДНФ

$$f_2=\phi_2 \mid \phi_3=\bar{x}_1 \mid x_1x_2\bar{x}_2.$$

Таблица функции f_2 не совпадает с таблицей F_2 в областях 1, 5, 7 (табл. 3). Действительно, строка 2 таблицы T_2 перекрывает строки 1, 5, 7, а строка 8 перекрывает строку 7:

$$\Phi_2\subseteq\tilde{\Phi}_1,\ \Phi_2\subseteq\tilde{\Phi}_5,\ \Phi_2\subseteq\tilde{\Phi}_7,\ \Phi_8\subseteq\tilde{\Phi}_7,$$

где $\Phi_2=\{3\}$, $\Phi_8=\{3,1,2\}$, $\tilde{\Phi}_1=\{4,3\}$, $\tilde{\Phi}_5=\{3,4\}$, $\tilde{\Phi}_7=\{1,3,2\}$.

Таким образом, F_2 не является функцией непрерывной логики. Для представления F_2 в предикатной алгебре выбора можно воспользоваться одной из следующих форм записи:

$$F_2=\begin{cases} f_2^1=\bar{x}_1 \mid x_1x_2\bar{x}_2, & \mathbf{x}\in D_2,D_3,D_4,D_6,D_8, \\ f_2^2=x_2\bar{x}_2x_1 \mid x_1\bar{x}_1x_2, & \mathbf{x}\in D_1,D_5,D_7. \end{cases} \qquad (14)$$

$$F_2=\begin{cases} g_2^1=\bar{x}_1, & \mathbf{x}\in D_2, \\ g_2^2=\bar{x}_2, & \mathbf{x}\in D_7, \\ g_2^3=x_1\bar{x}_1 \mid x_2\bar{x}_2, & \mathbf{x}\in D_1,D_3,D_4,D_5,D_6,D_8. \end{cases} \qquad (15)$$

Представления (14) и (15) функции F_2 соответствуют различным способам разбиения таблицы T_2 на подмножества неперекрывающихся строк. Функции непрерывной логики f_2^i и g_2^j синтезируются отдельно для каждого из подмножеств неперекрывающихся строк таблицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гинзбург С.А. Математическая непрерывная логика и изображение функций. -М.: Энергия, I968. -I36с.

2. Шимбирев П.Н. Гибридные непрерывно-логические устройства. -М.: Энергоатомиздат, I990. -I74с.

3. Золотова Т.М., Кербников Ф.И., Розенблат М.А. Резервирование аналоговых устройств автоматики. -М.: Энергия, I975. -I27с.

4. Волгин Л.И., Левин В.И. Непрерывная логика. Теория и применение. -Таллин, I99I. -2I0с.

5. Мак-Нотон Р. Теорема о бесконечнозначной логике высказываний //Кибернетический сборник. -М.: ИИЛ, I96I. -Вып.3, -с.59-78.

Таблица I

Номер области	Область	Значение функции
1	$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant \bar{x}_1$	x_2
2	$x_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
3	$\bar{x}_1 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_1$	x_1
4	$\bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant x_1$	x_1
5	$x_2 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2$	x_1
6	$x_2 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_2$	x_1
7	$\bar{x}_2 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_2$	x_1
8	$\bar{x}_2 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$	x_1

Таблица 2

Количество аргументов	Количество ФНЛ	Количество таблиц выбора
1	6	8
2	84	I679616
3	439I8	$\approx 223 \cdot 10^{41}$

Таблица 3

Номер	Область	F_1	F_2	f_1	f_2	f_2^1	f_2^2	g_2^1	g_2^2	g_2^3
1	$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant \bar{x}_1$	x_2	x_2	x_2	$\bar{x}_1$		x_2			x_2
2	$x_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_1$	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_1$		
3	$\bar{x}_1 \leqslant x_2 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_1$	$\bar{x}_2$	x_2	$\bar{x}_2$	x_2	x_2				x_2
4	$\bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2 \leqslant x_2 \leqslant x_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_2$				$\bar{x}_2$
5	$x_2 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant \bar{x}_2$	x_1	x_1	x_1	$\bar{x}_1$		x_1			x_1
6	$x_2 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_2$	x_1	$\bar{x}_1$	x_1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$				$\bar{x}_1$
7	$\bar{x}_2 \leqslant x_1 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$		$\bar{x}_2$		$\bar{x}_2$	
8	$\bar{x}_2 \leqslant \bar{x}_1 \leqslant x_1 \leqslant x_2$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$				$\bar{x}_1$