УДК 519.74, 681.51

Зайцев Д.А.
Zaitsev D.A.

ИНВАРИАНТЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСЕТЕЙ

INVARIANTS OF FUNCTIONAL SUBNETS

Аннотация. Представлен метод вычисления инвариантов сетей Петри, основанный на декомпозиции заданной сети на функциональные подсети. Метод состоит в вычислении инвариантов функциональных подсетей и последующем восстановлении инвариантов исходной сети. Получено экспоненциальное ускорение вычислений. Результаты проиллюстрированы на примере.

Summary. Method of Petri nets invariants calculation based on decomposition of a given net into functional subnets is represented. Method consists in calculation of invariants for functional subnets and subsequent recovery of invariants for source net. Exponential acceleration of computations was obtained. The results are explained with example.

В теории сетей Петри решения уравнения состояний [1] являются векторами счёта срабатываний переходов сети и должны быть неотрицательными. Поэтому необходимо использовать специальные методы для решения линейных систем уравнений на множестве целых неотрицательных чисел. Инварианты сетей Петри являются мощным инструментом исследования структурных свойств сетей [1] и представляют собой решения однородных систем уравнений.

Известные методы решения линейных систем уравнений в целых неотрицательных числах [2,3] имеют асимптотически экспоненциальную вычислительную сложность, что затрудняет их применение для исследования моделей реальных объектов. Целью настоящей работы является построение эффективных методов вычисления инвариантов.

Декомпозиция произвольной сети Петри на функциональные подсети исследована в работе [4]. Следует отметить, что функциональная подсеть представляет собой частный случай подсети с входными и выходными (контактными) позициями. В указанной работе было получено порождающее семейство функциональных подсетей заданной сети Петри. Кроме того, построен эффективный алгоритм декомпозиции, имеющий полиномиальную сложность.

Понятие функциональной подсети было ранее введено в работе [5] для осуществления эквивалентных преобразований временных сетей Петри. В указанной работе подсеть с входными и выходными позициями рассматривалась как динамическая система, преобразующая входной поток маркеров в некоторый выходной поток. Функциональная эквивалентность была использована для замены выбранной подсети эквивалентной подсетью, что позволяло уменьшить размерность модели.

В настоящей работе представлен метод вычисления инвариантов сетей Петри, основанный на декомпозиции. Метод состоит в вычислении инвариантов функциональных подсетей с последующим восстановлением инвариантов исходной сети. Показано, что применение представленного метода позволяет получить экспоненциальное ускорение вычислений.

Основные понятия и определения. В настоящей работе использована терминология и система обозначений, принятые в работах [3,4]. Приведём далее определения ключевых терминов.

Сеть Петри – это тройка $N = (P, T, F)$, где $P = \{p\}$ – конечное множество вершин, называемых позициями; $T = \{t\}$ – конечное множество вершин, называемых переходами, отношение смежности вершин $F = P \times T \bigcup T \times P$ – задаёт множество дуг, соединяющих позиции и переходы. Таким образом, сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф, одну долю вершин которого составляют позиции, а другую – переходы. Пример сети Петри N_1, имеющей пять позиций и шесть переходов, представлен на Рис. 1.

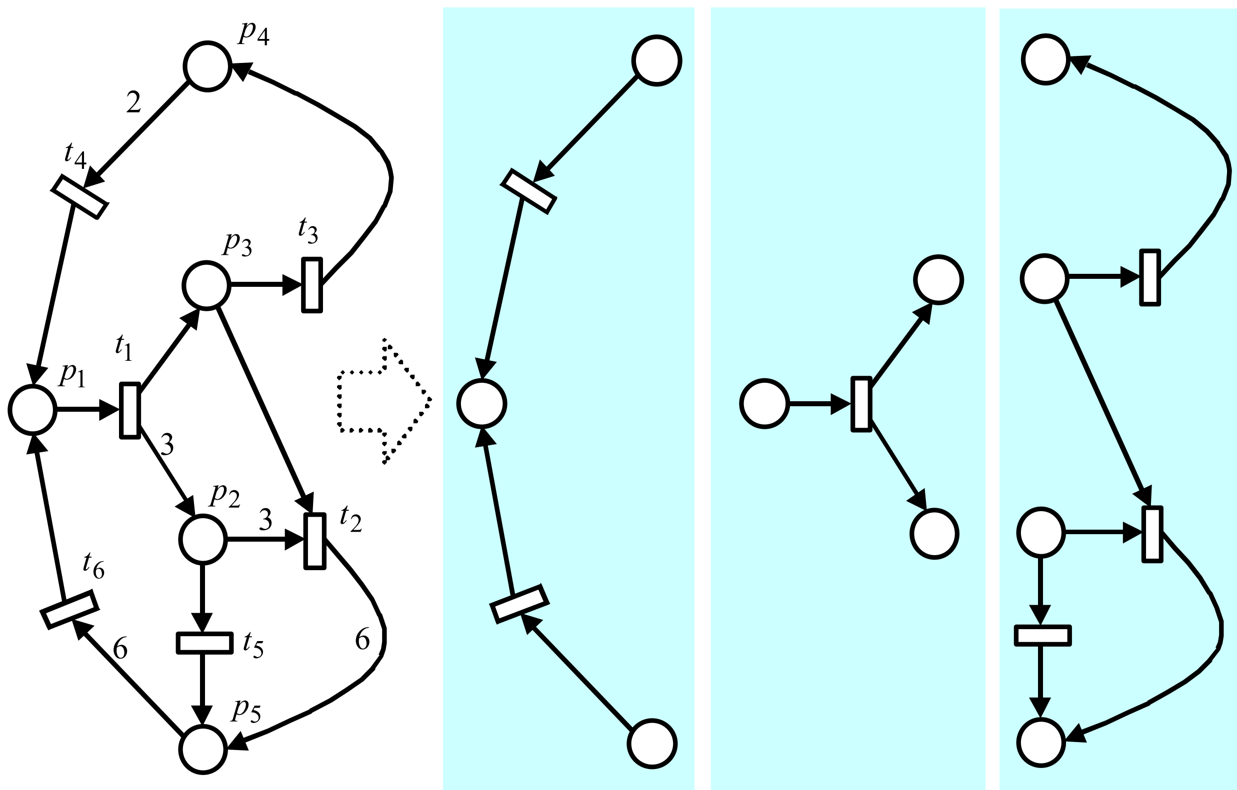

Рисунок 1 – Декомпозиция сети Петри N_1 на минимальные функциональные подсети

Множества входных и выходных переходов позиции сети обозначим следующим образом:

$$^{\bullet}p = \{t \mid \exists (t, p) \in F\}\,;\; p^{\bullet} = \{t \mid \exists (p, t) \in F\}\,.$$

Сетью с входными и выходными позициями называют сеть Петри, в которой указаны специальные подмножества позиций, а именно входные и выходные.

Функциональной сетью будем называть тройку $Z = (N, X, Y)$, где N – сеть Петри, $X \subseteq P$ – её входные позиции; $Y \subseteq P$ – выходные позиции, причём множества входных и выходных позиций не пересекаются: $X \bigcap Y = \varnothing$, и, кроме того, входные позиции не имеют входящих дуг, а выходные позиции исходящих: $\forall p \in X : {}^{\bullet}p = \varnothing$, $\forall p \in Y : p^{\bullet} = \varnothing$. Позиции из множества $Q = P \setminus (X \bigcup Y)$ будем называть внутренними.

Сеть Петри $N' = (P', T', F')$ является *подсетью* сети *N*, если $P' \subseteq P, T' \subseteq T, F' \subseteq F$. Функциональную сеть $Z = (N', X, Y)$ будем называть *функциональной подсетью* сети *N* и обозначать $Z \succ N$, если N' является подсетью N, и, кроме того, *Z* связана с оставшейся частью сети только посредством дуг, инцидентных входным либо выходным позициям, причём входные позиции могут иметь только входящие дуги, а выходные только исходящие. Таким образом, имеем:

$$\forall p \in X : \{(p,t) \mid t \in T \setminus T'\} = \varnothing,\ \forall p \in Y : \{(t,p) \mid t \in T \setminus T'\} = \varnothing,$$
$$\forall \in Q : \{(p,t) \mid t \in T \setminus T'\} = \varnothing \wedge \{(t,p) \mid t \in T \setminus T'\} = \varnothing.$$

Функциональная подсеть $Z' \succ N$ является *минимальной* тогда и только тогда, когда она не содержит другой функциональной подсети исходной сети Петри *N*.

В теории сетей Петри введенный граф *N* дополняют динамическими элементами – фишками; фишки располагаются в позициях и перемещаются по сети в результате срабатываний переходов [4]. В настоящей работе исследуются структурные свойства сетей и, поэтому, понятие динамики не рассматривается.

Кроме того, как правило, рассматривают *кратности дуг сети*, представленные отображением $W : F \to \mathrm{N}$. Кратность, отличную от единицы, указывают в виде числа на дуге. Так, например, кратность дуги (t_1, p_2) на Рис. 1 равна 3.

Пусть $|P| = m$, $|T| = n$ и множества позиций и переходов занумерованы. Введём матрицы A^-, A^+ входящих и исходящих дуг переходов соответственно:

$$A^- = \left\| a^-{}_{i,j} \right\|,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};\ a^-{}_{i,j} = \begin{cases} w(p_i,t_j), & (p_i,t_j) \in F \\ 0, & (p_i,t_j) \notin F \end{cases},$$

$$A^+ = \left\| a^+{}_{i,j} \right\|,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};\ a^+{}_{i,j} = \begin{cases} w(t_j,p_i), & (t_j,p_i) \in F \\ 0, & (t_j,p_i) \notin F \end{cases}.$$

И, наконец, введём *матрицу инцидентности* A сети Петри как $A = A^+ - A^-$.

p-инвариантом сети Петри [1] называют целые неотрицательные решения системы

$$\bar{x} \cdot A = 0. \tag{1}$$

t-инвариантом называют целые неотрицательные решения системы

$$\bar{y} \cdot A^T = 0.$$

Инварианты играют ключевую роль при исследовании таких свойств сетей как ограниченность, консервативность, живость.

Так как в соответствии с [1] каждый t-инвариант сети Петри является p-инвариантом двойственной сети, далее, не ограничивая общности, мы будем рассматривать только p-инварианты.

Инварианты функциональных подсетей. Рассмотрим структуру системы уравнений (1):

$$\bar{x} \cdot A = 0.$$

Каждое уравнение L_i: $\bar{x} \cdot A^i = 0$, где A^i обозначает столбец i матрицы A, соответствует переходу t_i. Уравнение содержит термы для всех инцидентных позиций. Причём коэффициенты равны весам дуг и термы для входных позиций имеют знак минус, а для выходных – плюс.

Таким образом, систему (1) можно представить как

$$L = L_1 \wedge L_2 \wedge ... \wedge L_n \tag{2}$$

Теорема 1. Инвариант $\bar{x}'$ сети Петри N является инвариантом любой из её функциональных подсетей.

Доказательство. Так как $\bar{x}'$ является инвариантом сети Петри N, то $\bar{x}'$ является неотрицательным целым решением системы (2) и, следовательно, $\bar{x}'$ является неотрицательным целым решением каждого из уравнений L_i. Таким образом, $\bar{x}'$ является решением произвольного подмножества множества $\{L_i\}$.

В соответствии с представленным в работе [4] утверждением 2, функциональная подсеть Z', $Z' \succ N$ порождается множеством своих переходов T'. Следовательно, уравнение, соответствующее переходу, имеет ту же самую форму L_i как и для всей сети, так как подсеть содержит все инцидентные позиции исходной сети.

Таким образом, система для нахождения инвариантов функциональной подсети Z', $Z' \succ N$ является некоторым подмножеством множества $\{L_i\}$ и вектор $\bar{x}'$ является её решением. Следовательно, $\bar{x}'$ является инвариантом функциональной подсети Z'. Произвольность выбора подсети $Z' \succ N$ в вышеизложенных рассуждениях и доказывает теорему.

□

Следствие. Все функциональные подсети инвариантной сети Петри являются инвариантными.

Лемма 1. В декомпозиции сети Петри контактная позиция имеет не более одной входной и не более одной выходной минимальной функциональной подсети.

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим каждый из возможных вариантов отдельно:

а) существует контактная позиция $p \in C$, которая имеет более одной входной минимальной функциональной подсети;

б) существует контактная позиция $p \in C$, которая имеет более одной выходной минимальной функциональной подсети.

В случае а) существуют такие минимальные функциональные сети Z', Z'', что

$$(\exists t' \in Z',\ t' \in {}^{\bullet}p) \wedge (\exists t'' \in Z'',\ t'' \in {}^{\bullet}p).$$

Так как в соответствии с представленной в работе [4] теоремой 4, каждая минимальная функциональная подсеть полна в N, то переходы t', t'' в соответствии с определением полноты принадлежат одной минимальной функциональной подсети. Таким образом, мы получаем противоречие.

В случае б) существуют такие минимальные функциональные сети Z', Z'', что

$$(\exists t' \in Z',\ t' \in p^{\bullet}) \wedge (\exists t'' \in Z'',\ t'' \in p^{\bullet}).$$

И таким же образом, как и в случае а), мы приходим к противоречию.

Полученное противоречие и доказывает настоящую лемму.

□

Теорема 2. Сеть Петри N инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантны все её минимальные функциональные подсети и существует общий ненулевой инвариант контактных позиций.

Доказательство. Чтобы не доказывать отдельно необходимое и достаточное условия, далее будут использованы эквивалентные преобразования систем уравнений. В соответствии с (1) множество минимальных функциональных подсетей $\Im = \{Z^j\}, Z^j \succ N$ произвольной сети Петри N определяет разбиение множества T на непересекающиеся подмножества T^j. Пусть количество минимальных функциональных подсетей равно k. Как было отмечено в доказательстве теоремы 1, уравнения содержат термы для всех инцидентных позиций. Таким образом,

$$L \quad \Leftrightarrow \quad L^1 \wedge L^2 \wedge ... \wedge L^k, \tag{3}$$

где L^j – подсистема для минимальной функциональной подсети $Z^j, Z^j \succ N$. Отметим, что если L^j не имеет решений, то L также не имеет решений (за исключением тривиального).

Пусть R^j это матрица базисных решений подсистемы L^j. Тогда мы можем представить общее решение подсистемы L^j в форме $\bar{x} = \bar{z}^j \cdot R^j$, где $\bar{z}^j$ – произвольный вектор целых неотрицательных чисел. Тогда в соответствии с (3):

$$L \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x} = \bar{z}^1 \cdot R^1 = \bar{z}^2 \cdot R^2 = ... = \bar{z}^k \cdot R^k.$$

Следовательно, система

$$\bar{x} = \bar{z}^1 \cdot R^1 = \bar{z}^2 \cdot R^2 = ... = \bar{z}^k \cdot R^k \tag{4}$$

эквивалентна исходной системе уравнений (1). Далее мы покажем, что решение системы (4) требует рассмотрения значительно меньшего количества уравнений. Рассмотрим множество позиций сети Петри N со множеством минимальных функциональных подсетей $\{Z^j \mid Z^j \succ N\}$:

$$P = Q^1 \cup Q^2 \cup ... \cup Q^k \cup C,$$

где Q^j множество внутренних позиций подсети Z^j, а C множество контактных позиций. В соответствии с определением каждая внутренняя позиция $p \in Q^j$ инцидентна только переходам из множества T^j. Поэтому x_p, соответствующая этой позиции, входит только в подсистему L^j. Следовательно, необходимо решить уравнения только для контактных позиций из множества C.

Построим теперь уравнения для контактных позиций сети $p \in C$, так как только они инцидентны более чем одной подсети. В соответствии с Леммой 2 каждая контактная позиция $p \in C$ инцидентна не более чем двум функциональным подсетям. Таким образом, мы имеем уравнения

$$\bar{z}^i \cdot R_p^i = \bar{z}^j \cdot R_p^j, \tag{5}$$

где i, j номера минимальных функциональных подсетей, инцидентных контактной позиции $p \in C$, а R_p^j – столбец матрицы R^j, соответствующий позиции p. Уравнение (5) можно представить в форме

$$\bar{z}^i \cdot R_p^i - \bar{z}^j \cdot R_p^j = 0 .$$

Таким образом, система

$$\begin{cases} x_p = \bar{z}^j \cdot R_p^j, & p \in Q^j \vee p \in C, \\ \bar{z}^i \cdot R_p^i - \bar{z}^j \cdot R_p^j = 0, & p \in C \end{cases} \qquad (6)$$

эквивалентна исходной системе (1). Что и доказывает теорему.

□

Заметим, что в обоих описанных в доказательстве случаях в соответствии с (6) необходимо решить линейную однородную систему уравнений.

Следствие 1. Для вычисления инвариантов сети Петри следует вычислить инварианты её минимальных функциональных подсетей, а затем найти общие инварианты контактных позиций.

Следствие 2. Теорема 3 справедлива также для произвольного подмножества функциональных подсетей, определяющего разбиение множества переходов сети Петри.

Метод вычисление инвариантов с помощью декомпозиции. Принимая во внимание результаты, полученные в предыдущем разделе, можно сформулировать метод вычисления инвариантов, основанный на декомпозиции сети Петри:

Этап 1. Выполнить декомпозицию сети Петри на функциональные подсети.
Этап 2. Вычислить инварианты каждой из функциональных подсетей - построить общие решения однородных систем уравнений.
Этап 3. Найти совместное решение (6) для множества контактных позиций.

Отметим, что на этапах 2, 3 решаются системы линейных однородных диофантовых уравнений в целых неотрицательных числах. Следует найти общее решение системы, которое может быть представлено, как линейная комбинация базисных. Для этих целей могут быть применены методы, описанные в [2,3].

Общим недостатком известных методов решения линейных систем в целых неотрицательных числах является их экспоненциальная вычислительная сложность. Так, например, при сложности $\sim 2^n$, где n - количество вершин сети для нахождения инвариантов модели, насчитывающей сотню вершин, в худшем случае потребуется выполнить около 10^{30} операций. Пусть мы используем процессор с быстродействием $\sim 10^{10}$ операций в секунду. Тогда вычисления займут более 10^{12} лет.

Оценим общее ускорение вычислений при использовании метода декомпозиции. Пусть k – это максимальное количество контактных позиций либо внутренних позиций подсетей. Представим $n = c \cdot k$, где c – некоторая неотрицательная константа. Тогда сложность вычисления инвариантов с помощью декомпозиции можно оценить как $\sim 2^k$, поскольку сложность декомпозиции в соответствии с [4] полиномиальна.

Тогда ускорение вычислений представимо как

$$2^n \big/ 2^k = 2^{k \cdot c} \big/ 2^k = 2^{k \cdot (c-1)} = 2^{n-k} . \qquad (7)$$

Таким образом, полученное ускорение вычислений является экспоненциальным.

Пример вычисления инвариантов сети с помощью декомпозиции. Проиллюстрируем применение описанного метода. Вычислим инварианты сети N_1, изображённой на Рис. 1, с помощью декомпозиции.

Этап 1. Применение алгоритма декомпозиции к сети N_1, как это описано в [1], приводит к получению трёх минимальных функциональных подсетей Z^1, Z^2, Z^3, полностью определённых множествами своих переходов $T^1 = \{t_4, t_6\}$, $T^2 = \{t_1\}$, $T^3 = \{t_2, t_3, t_5\}$.

Этап 2. Найдём инварианты минимальных функциональных подсетей.

Подсеть Z^1. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} -6 \cdot x_5 + x_1 = 0, \\ -2 \cdot x_4 + x_1 = 0. \end{cases}$$

Общее решение

$$\bar{x} = z_1^1 \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подсеть Z^2. Система уравнений имеет вид

$$\left\{ -x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 = 0. \right.$$

Общее решение

$$\bar{x} = (z_1^2, z_2^2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подсеть Z^3. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} -3 \cdot x_2 - x_3 + 6 \cdot x_5 = 0, \\ \qquad -x_3 + x_4 = 0, \\ \qquad -x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Общее решение

$$\bar{x} = z_1^3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этап 3. Запишем систему уравнений для контактных позиций. Отметим, что в исследуемой сети N_1 все позиции являются контактными.

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot z_1^2 + 1 \cdot z_2^2 = 6 \cdot z_1^1, \\ \quad x_2 = 1 \cdot z_1^2 = 1 \cdot z_1^3, \\ \quad x_3 = 1 \cdot z_2^2 = 3 \cdot z_1^3, \\ \quad x_4 = 3 \cdot z_1^3 = 3 \cdot z_1^1, \\ \quad x_5 = 1 \cdot z_1^2 = 1 \cdot z_1^1. \end{cases}$$

Представим систему в форме (1)

$$\begin{cases} 3 \cdot z_1^2 + 1 \cdot z_2^2 - 6 \cdot z_1^1 = 0, \\ 1 \cdot z_1^2 - 1 \cdot z_1^3 = 0, \\ 1 \cdot z_2^2 - 3 \cdot z_1^3 = 0, \\ 3 \cdot z_1^3 - 3 \cdot z_1^1 = 0, \\ 1 \cdot z_1^3 - 1 \cdot z_1^1 = 0. \end{cases}$$

Общее решение по отношению к вектору неизвестных $\bar{z} = (z_1^1, z_1^2, z_2^2, z_1^3)$ имеет вид $\bar{z} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда инварианты сети N_1 представимы в виде

$$\bar{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Решение (8) совпадает с общим решением, полученным при поиске инвариантов стандартными методами.

Отметим, что в описанном примере не рассматривается ускорение вычислений, так как исследуется сеть малого размера, все позиции которой являются контактными.

Выводы. Вычислительная сложность известных методов нахождения инвариантов сетей Петри является в общем случае экспоненциальной по отношению к количеству вершин сети, что делает практически невозможным исследование моделей реальных объектов, насчитывающих тысячи вершин.

Предложенный в статье метод позволяет ускорить вычисление инвариантов. Метод основан на декомпозиции исходной сети Петри на функциональные подсети, вычислении инвариантов подсетей и последующем восстановлении инвариантов всей сети.

Полученное ускорение вычислений является экспоненциальным по отношению к количеству вершин сети.

Литература

1. Murata T. Petri Nets: Properties, Analysis and Applications // Proceedings of the IEEE, April 1989.- Vol. 77.- p. 541-580.
2. Toudic J.M. Linear Algebra Algorithms for the Structural Analysis of Petri Nets // Rev. Tech. Thomson CSF, 1982.- No. 1.- Vol. 14.- p. 136-156.
3. Zaitsev D.A. Formal Grounding of Toudic Method // Proc. of 10th Workshop Algorithms and Tools for Petri Nets.- September 26-27, 2003.- Eichstaett, Germany, p. 184-190.
4. Zaitsev D.A. Subnets with input and output places // Petri Net Newsletter.- April 2003.- Vol. 64.- p. 3-6.
5. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Уравнения состояний и эквивалентные преобразования временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ.- 1997.- N 5.- с. 59-76.

Опубликовано: Труды Одесской национальной академии связи им. А.С.Попова, № 4, 2003, с. 57-63.