Передаточная функция сети Петри

Д.А.Зайцев

ВВЕДЕНИЕ

В [1,2] показано, что произвольная сеть Петри [3] может рассматриваться как функциональная сеть по отношению к позициям, являющимся источниками и стоками её графа. Кроме того, представлен алгоритм, позволяющий выполнить разбиение сети Петри на функциональные подсети.

В [4] построено уравнение состояний временной сети Петри с многоканальными переходами и получено представление передаточной функции для подкласса структурно-бесконфликтных сетей Петри. Показано, что алгебраические преобразования передаточной функции соответствуют эквивалентным преобразованиям сетей.

Существенным ограничением в применении полученных результатов является малая изобразительная мощность подкласса структурно-бесконфликтных сетей, допускающих не более одной исходящей дуги для каждой позиции. Кроме того, при исследовании систем целесообразно применение слабых типов эквивалентности по отношению к специальным формам входных последовательностей фишек и отдельным заданным моментам времени.

Целью настоящей работы является получение алгебраического представления передаточной функции для произвольной заданной временной сети Петри и разработка эквивалентных преобразований сетей для слабых типов функциональной эквивалентности.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СЕТИ ПЕТРИ

Граф сеть Петри – это двудольный ориентированный граф $N=(P,T,F)$, где $P=\{p\}$ – конечное множество вершин, именуемых позициями, $T=\{t\}$ – конечное множество вершин, именуемых переходами; отношение $F \subseteq P\times T \bigcup T\times P$ определяет множество дуг, соединяющих позиции и переходы.

Сеть с входными и выходными позициями – это сеть Петри, в которой указаны специальные подмножества входных и выходных позиций.

Функциональная сеть – это тройка $Z=(N,X,Y)$, где N – сеть Петри, $X \subseteq P$ – множество входных позиций, $Y \subseteq P$ – множество выходных позиций, при этом множества входных и выходных позиций не пересекаются $X \bigcap Y = \varnothing$, и, кроме того, входные позиции не имеют входящих дуг, а выходные позиции не имеют исходящих дуг:

$\forall p \in X : {}^{\bullet}p = \varnothing$, $\forall p \in Y : p^{\bullet} = \varnothing$. Далее позиции множества $Q = P \setminus (X \bigcup Y)$ будем называть *внутренними*, а позиции множества $X \bigcup Y$ – *контактными*.

Функциональную сеть $Z = (N', X, Y)$ будем называть *функциональной подсетью* сети N и обозначать $Z \succ N$, если N' является подсетью N порождённой множеством своих переходов $T' \subseteq T$ и выполняется условие ${}^{\bullet}(T'^{\bullet}) \cup ({}^{\bullet}T')^{\bullet} \subseteq T'$.

Функциональная подсеть $Z' \succ N$ является *минимальной*, если она не содержит другие функциональные подсети исходной сети Петри N.

Проблемы декомпозиции сетей Петри на функциональные подсети были исследованы в [1,2]. В [1] представлены основы композиционного анализа сетей Петри, обеспечивающего экспоненциальные ускорения вычислений.

ПОВЕДЕНИЕ СЕТИ ПЕТРИ

Маркировка сети – это отображение $\mu : P \to \mathrm{N}_0$, определяющее распределение динамических элементов, именуемых фишками, на множестве позиций; N_0 – множество неотрицательных целых чисел $\mathrm{N}_0 = \mathrm{N} \cup \{0\}$. *Маркированная сеть Петри* – это пара $M = (N, \mu_0)$, либо пятёрка $M = (P, T, F, \mu_0)$, где μ_0 – её начальная маркировка.

Поведение сети Петри представляет собой процесс перемещения фишек между позициями в результате срабатывания переходов. Правила срабатывания переходов определяются классом исследуемых сетей [3,5-7]. При исследовании передаточной функции будем рассматривать класс временных сетей Петри с кратными дугами и многоканальными переходами [4]. В этом случае представление сети включает дополнительные отображения: $\mathrm{W} : F \to \mathrm{N}$ – кратности дуг и $\mathrm{D} : T \to \mathrm{N}$ – времена срабатывания переходов. Поведение такой сети описывается следующим *уравнением состояний* [5]:

$$\begin{cases} \lambda_p(\tau) = \mu_p(\tau - 1) + \sum\limits_{t \in {}^{\bullet}p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau - d_t) + \alpha_p^{\tau}, \\ \mu_p(\tau) = \lambda_p(\tau) - \sum\limits_{t \in p^{\bullet}} w_{t,p} \cdot u_t, \\ \mu_p(\tau) \geq 0, \\ \\ 0 \leq u_t(\tau) \leq \upsilon_t(\tau), \\ \upsilon_t(\tau) = \mathop{\&}\limits_{q \in {}^{\bullet}t} \lambda_q(\tau) / w_{q,t}, p \in P, t \in T, \\ S(0) = S_0, \tau = 1,2,... \end{cases} \qquad (1)$$

где величина $u_t(\tau)$ равна количеству экземпляров (каналов) перехода t, запущенных в такте τ; $\nu_t(\tau)$ - количество экземпляров перехода t, возбуждённых в такте τ; $\lambda_p(\tau)$ - промежуточная маркировка позиции p в момент смены такта $\tau - 1$ тактом τ, получающаяся при завершении ранее запущенных переходов. Операция конъюнкции (&) интерпретируется, как в многозначной логике [8]: $x\&y = \min(x,y)$. а операция деления является делением нацело.

Заметим, что невременные синхронные и асинхронные сети Петри [3] являются частным случаем рассматриваемого класса сетей Петри при временах срабатывания переходов, равном единице, и одном экземпляре каждого из переходов. Явные ограничения числа каналов переходов не рассматриваются, так как они могут быть введены с помощью маркировок вспомогательных позиций [4].

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ СЕТИ ПЕТРИ

В настоящей работе, как и в [4], функциональная сеть Петри рассматривается как дискретная система (Рис. 1), преобразующая входную последовательность фишек, направленную во входные позиции X, в выходную последовательность фишек, наблюдаемую в выходных позициях Y.

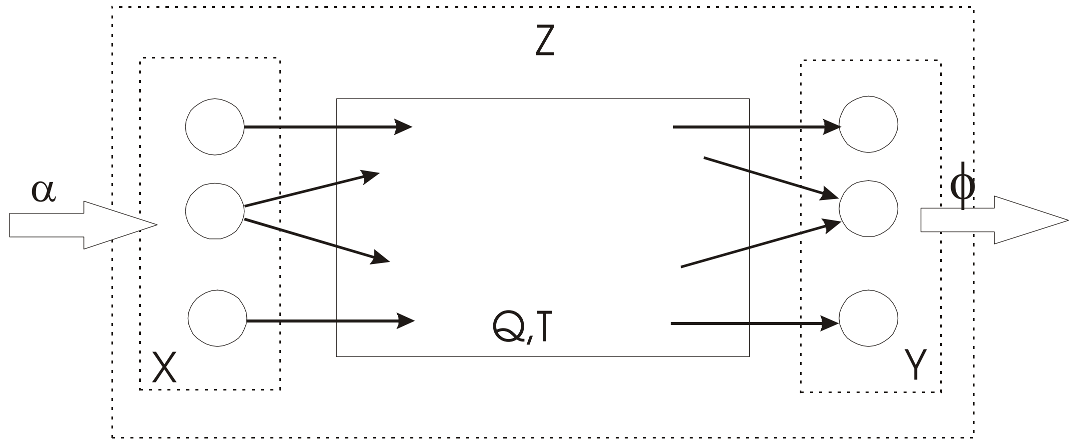

Рис. 1. Функциональная сеть Петри

Входной последовательностью α сети Z будем называть множество целых неотрицательных чисел $\alpha = \{\alpha_x^\tau \mid x \in X, \tau = 1,2,...\}$. *Выходной последовательностью* ϕ сети Z будем называть последовательность маркеров $\{\phi_y^\tau \mid y \in Y, \tau = 1,2,...\}$, поступающих в её выходные позиции в результате функционирования сети Z.

Отображение f_Z множества входных последовательностей $\{\alpha\}$ сети Z во множество множеств её выходных последовательностей $\{\phi\}$ будем называть *передаточной функцией сети* и обозначать $\Phi = f_Z\{\alpha\}$.

Неявное представление передаточной функции произвольной сети Петри задано её уравнением состояний (1). В [4] получено явное представление передаточной функции относительно частичных сумм входных последовательностей для подкласса структурно-бесконфликтных сетей. В настоящей работе для представления передаточной функции произвольной сети используем следующее соотношение:

$$\phi_y(\tau) = \mu_y(\tau) - \mu_y(\tau - 1), y \in Y$$

и далее, используя тот факт, что для выходной позиции её маркировка и промежуточная маркировка в момент смены тактов совпадают (так как отсутствуют исходящие дуги) $\mu_y(\tau) = \lambda_y(\tau), y \in Y$, представим передаточную функцию как

$$\phi_y(\tau) = \lambda_y(\tau) - \lambda_y(\tau - 1), y \in Y.$$

Таким образом, последовательности $\lambda_y(\tau), \tau = 1,2,...$ однозначно определяют передаточную функцию сети Петри. Тогда следующая теорема задаёт представление передаточной функции.

Теорема 1. Передаточная функция временной сети Петри Z описывается следующей системой:

$$\begin{cases} \lambda_p(\tau) = \lambda_p(\tau-1) - \sum\limits_{t \in {}^\bullet p} w_{p,t} \cdot u_t(\tau - 1) + \sum\limits_{t \in {}^\bullet p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau - d_t), p \in Q \cup Y, \\ \sum\limits_{t \in p^\bullet} w_{p,t} \cdot u_t(\tau) \le \lambda_p(\tau), p \in X \cup Q, \\ u_t(\tau) \le \mathop{\&}\limits_{q \in {}^\bullet t} \lambda_q(\tau) / w_{q,t}, p \in X \cup Q. \end{cases} \quad (2)$$

Доказательство. Подставим второе уравнение системы (1) для такта $\tau - 1$ в первое и получим:

$$\lambda_p(\tau) = \lambda_p(\tau-1) - \sum_{t \in {}^\bullet p} w_{p,t} \cdot u_t(\tau - 1) + \sum_{t \in {}^\bullet p} w_{t,p} \cdot u_t(\tau - d_t), p \in Q \cup Y.$$

Из второго уравнения и неравенства $\mu_p(\tau) \ge 0$ получим:

$$\sum_{t \in p^\bullet} w_{p,t} \cdot u_t(\tau) \le \lambda_p(\tau), p \in X \cup Q.$$

Из четвёртого уравнения и неравенства $0 \le u_t(\tau) \le \upsilon_t(\tau)$ получим:

$$u_t(\tau) \le \mathop{\&}_{q \in {}^\bullet t} \lambda_q(\tau) / w_{q,t}.$$

■

Для алгебраических преобразований передаточной функции синхронных сетей положим $u_t(\tau) = v_t(\tau)$. Тогда с использованием операций алгебры временных сетей [4] передаточная функция (2) в произвольном такте времени τ может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} \lambda_p = \lambda_p \rhd 1 - \sum\limits_{t \in {}^\bullet p} w_{p,t} \cdot \mathop{\&}\limits_{q \in {}^\bullet t} (\lambda_q \rhd 1) / w_{q,t}) + \sum\limits_{t \in {}^\bullet p} w_{t,p} \cdot \mathop{\&}\limits_{q \in {}^\bullet t} (\lambda_q \rhd d_t) / w_{q,t}), p \in Q \cup Y, \end{cases} \quad (3)$$

где операция $\rhd$ представляет временную задержку.

ТИПЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Сети Z и Z' будем называть *функционально эквивалентными* [4] и обозначать $Z \equiv Z'$, если для любой входной последовательности α множества их выходных последовательностей совпадают $f_Z(\alpha) = f_{Z'}(\alpha)$.

Приведенное определение функциональной эквивалентности является наиболее сильным, поскольку оно требует совпадения множеств выходных последовательностей для любой входной последовательности и любого момента времени. Определим слабые типы эквивалентности.

Пусть $\Omega = \{\alpha\}$ – заданный класс входных последовательностей. Например, $\alpha_\tau = 1$ – последовательность, добавляющая одну фишку в каждый момент времени. Сети Z и Z' будем называть *эквивалентными по отношению к классу входных последовательностей* Ω и обозначать $Z \overset{\Omega}{\equiv} Z'$, если для любой входной последовательности $\alpha \in \Omega$ множества их выходных последовательностей совпадают $f_Z(\alpha) = f_{Z'}(\alpha)$.

Пусть $\Delta = \tau_1, \tau_2, \ldots$ – последовательность (возможно бесконечная) моментов времени наблюдения. Например, $\Delta = 10$ – единственный момент времени наблюдения равный 10. Сети Z и Z' будем называть *эквивалентными по отношению к моментам наблюдения* Δ и обозначать $Z \overset{\Delta}{\equiv} Z'$, если для любой входной последовательности α множества их входных последовательностей в моменты времени $\tau \in \Delta$ совпадают $f_Z^\tau(\alpha) = f_{Z'}^\tau(\alpha)$.

Комбинированный тип эквивалентности назовём слабой функциональной эквивалентностью сетей Петри. Сети Z и Z' будем называть *слабо эквивалентными* по отношению к классу входных последовательностей Ω и моментам наблюдения Δ и обозначать $Z \overset{\Omega,\Delta}{\equiv} Z'$, если для любой входной последовательности $\alpha \in \Omega$ множества их входных последовательностей в моменты времени $\tau \in \Delta$ совпадают $f_Z^\tau(\alpha) = f_{Z'}^\tau(\alpha)$.

Исследование слабой эквивалентности целесообразно при разработке систем управления, в которых результат наблюдается только в моменты выдачи управляющих воздействий на объект. Кроме того, специфика работы датчиков, отображаемых на входные позиции, определяет конкретный класс входной последовательности. При композиции функциональных сетей [1] класс входной последовательности подсети задан классом выходной последовательности её входной подсети.

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЕТЕЙ

Преобразования сетей для сильного типа эквивалентности могут быть выполнены с помощью эквивалентных преобразований формул уравнений передаточной функции (3) на основе законов алгебры временных сетей [4], включающей арифметические, логические и временные операции. Рассмотрим ряд преобразований конкретных сетей Петри, изображенных ни Рис. 2.

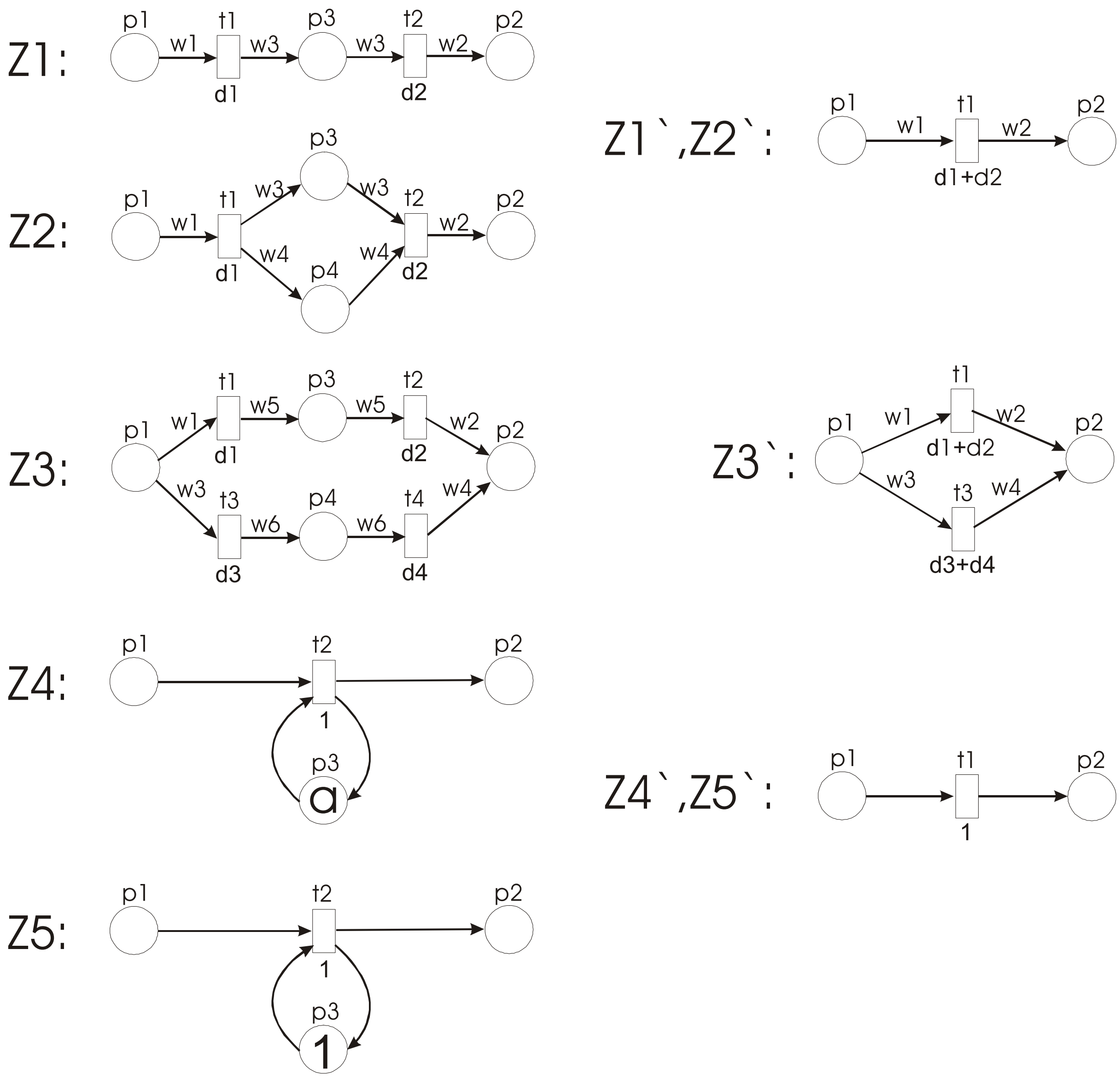

Рис. 2. Примеры эквивалентных преобразований

Пример 1) $Z_1 \equiv Z_1'$:

$$\begin{cases} \lambda_3 = \lambda_3 \triangleright 1 - w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_3) + w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1), \\ \lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((\lambda_3 \triangleright d_2)/w_3). \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (((\lambda_3 \triangleright 1 - w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_3) + w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1)) \triangleright d_2)/w_3) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (\lambda_3 \triangleright (d_2 + 1))/w_3) - w_2 \cdot w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright (d_2 + 1)/w_3)/w_3 +$$
$$w_2 \cdot w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2)/w_1)/w_3) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (\lambda_3 \triangleright (d_2 + 1))/w_3) - w_2 \cdot ((\lambda_3 \triangleright (d_2 + 1)/w_3) +$$
$$w_2 \cdot ((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2)/w_1)) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2)/w_1)).$$

Пример 2) $Z_2 \equiv Z_2'$:

$$\begin{cases} \lambda_3 = \lambda_3 \triangleright 1 - w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_3) + w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1, \\ \lambda_4 = \lambda_4 \triangleright 1 - w_4 \cdot ((\lambda_4 \triangleright 1)/w_4) + w_4 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1, \\ \lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (((\lambda_3 \triangleright d_2)/w_3) \,\&\, ((\lambda_4 \triangleright d_2)/w_4). \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((((\lambda_3 \triangleright 1 - w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_3) + w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1) \triangleright d_2)/w_3) \,\&$$
$$(((\lambda_4 \triangleright 1 - w_4 \cdot ((\lambda_4 \triangleright 1)/w_4) + w_4 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1) \triangleright d_2)/w_4) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((((\lambda_3 \triangleright 1 - w_3 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_3) + w_3 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1) \triangleright d_2)/w_3) \,\&$$
$$(((\lambda_4 \triangleright 1 - w_4 \cdot ((\lambda_4 \triangleright 1)/w_4) + w_4 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1) \triangleright d_2)/w_4) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2))/w_1) \,\&\, ((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2))/w_1) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2))/w_1).$$

Заметим, что примеры 1,2 были ранее рассмотрены в работе [4], где преобразования получены с использованием представления передаточной функции структурно-бесконфликтной сети для частичных сумм последовательностей; результаты преобразований совпадают.

Пример 3) $Z_3 \equiv Z_3'$:

$$\begin{cases} \lambda_3 = \lambda_3 \triangleright 1 - w_5 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_5) + w_5 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1, \\ \lambda_4 = \lambda_4 \triangleright 1 - w_6 \cdot ((\lambda_4 \triangleright 1)/w_6) + w_6 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_3)/w_1, \\ \lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot (((\lambda_3 \triangleright d_2)/w_5) + w_4 \cdot ((\lambda_4 \triangleright d_4)/w_6). \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((((\lambda_3 \triangleright 1 - w_5 \cdot ((\lambda_3 \triangleright 1)/w_5) + w_5 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_1)/w_1) \triangleright d_2)/w_5) +$$
$$w_4 \cdot (((\lambda_4 \triangleright 1 - w_6 \cdot ((\lambda_4 \triangleright 1)/w_6) + w_6 \cdot ((\lambda_1 \triangleright d_3)/w_1) \triangleright d_4)/w_6) =$$

$$\lambda_2 \triangleright 1 + w_2 \cdot ((\lambda_1 \triangleright (d_1 + d_2)/w_1)) + w_4 \cdot ((\lambda_1 \triangleright (d_3 + d_4)/w_1)).$$

Заметим, что в случае конфликтов в сетях использование уравнений (3) является корректным только с точки зрения структурных преобразований; при рассмотрении последовательностей фишек они должны быть дополнены неравенствами, представленными в системе (2).

Рассмотрим особенности преобразований для слабых типов эквивалентности. Специфические виды входных последовательностей и последовательностей моментов наблюдения позволяют получить дополнительные правила преобразований, приводящие к существенному уменьшению размерности сетей.

Пример 4) Постоянное маркирование входных позиций.

$Z_4 \overset{\Omega_1}{\equiv} Z'_4$, $\Omega_1 = \{\alpha_x^\tau = a \mid \tau \geq 0, a = const\}$:

$\lambda_3 = \lambda_3 \rhd 1 - (\lambda_3 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_1 \rhd 1) + (\lambda_3 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_1 \rhd 1) = \lambda_3 \rhd 1 = a$.

$\lambda_1 = \lambda_1 \rhd 1 - (\lambda_1 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_3 \rhd 1) + a = \lambda_1 \rhd 1 - (\lambda_1 \rhd 1) \,\&\, a + a = \lambda_1 \rhd 1 = a$.

$\lambda_2 = \lambda_2 \rhd 1 + (\lambda_1 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_3 \rhd 1) = \lambda_2 \rhd 1 + (\lambda_1 \rhd 1)$.

Пример 5) Периодическая входная последовательность и периодическое наблюдение.

$Z_5 \overset{\Omega_2, \Delta_1}{\equiv} Z'_5$, $\Omega_2 = \{(\alpha_x^\omega = a \mid \omega = 0, b, 2b, 3b, ...) \,\&\, (\alpha_x^\tau = 0, \tau \neq \omega, a = const)\}$,

$\Delta_1 = \{b, 2b, 3b, ... \mid b = const\}$, $a \leq b$:

Z_5:

$$\lambda_3 = \lambda_3 \rhd 1 - (\lambda_3 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_1 \rhd 1) + (\lambda_3 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_1 \rhd 1) = \begin{cases} 1, \tau \bmod b \leq a, \\ 0, \tau \bmod b > a. \end{cases}$$

$$\lambda_2 = \lambda_2 \rhd 1 + (\lambda_1 \rhd 1) \,\&\, (\lambda_3 \rhd 1) = \lambda_2 \rhd 1 + \begin{Bmatrix} 1, \tau \bmod b \leq a \\ 0, \tau \bmod > a \end{Bmatrix}.$$

$\lambda_2 = \lambda_2 \rhd b + a$.

Z'_5:

$$\lambda'_2 = \lambda'_2 \rhd 1 + \begin{Bmatrix} a, \tau \bmod b = 0 \\ 0, \tau \bmod b \neq 0 \end{Bmatrix}.$$

$\lambda'_2 = \lambda'_2 \rhd b + a$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе получено алгебраическое представление передаточной функции произвольной временной сети Петри. Введены и исследованы слабые типы функциональной эквивалентности, изучены дополнительные правила преобразований сетей для слабых типов эквивалентности, приводящие к существенному уменьшению размера сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zaitsev D.A. Functional Petri Nets, Universite Paris-Dauphine, Cahier du Lamsade 224 Avril 2005, 62p (www.lamsade.dauphine.fr/cahiers.html).

2. Зайцев Д.А. Декомпозиция сетей Петри // Кибернетика и системный анализ, №5, 2004, с. 131-140.
3. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР, т. 77, №4, 1989, с. 41-85.
4. Зайцев Д.А., Слепцов А.И. Уравнение состояний и эквивалентные преобразования временных сетей Петри // Кибернетика и системный анализ, № 5, 1997, с. 59-76.
5. Слепцов А.И., Юрасов А.А. Автоматизация проектирования управляющих систем гибких автоматизированных производств / Под ред. Б.Н.Малиновского.- К. Техніка, 1986.- 160 с.
6. Girault C., Volk R. Petri nets for systems engineering – A guide to modelling, verification and applications, Springer-Verlag, 2003.
7. Cortadella J., Kishinevsky M., Kondratyev A., Lavagno L., Yakovlev A. Logic synthesis of asynchronous controllers and interfaces, Springer-Verlag, 2002.
8. Зайцев Д.А., Сарбей В.Г., Слепцов А.И. Синтез функций непрерывной логики заданных таблично // Кибернетика и системный анализ, № 2, 1998, с. 47-56.