

# Решение фундаментального уравнения сетей Петри в процессе композиции функциональных подсетей

Д.А.Зайцев

## ВВЕДЕНИЕ

Матричные методы [1,2,3] являются наиболее перспективными для анализа моделей Петри большой размерности. Фундаментальное уравнение сетей Петри представляет собой систему линейных диофантовых уравнений [1]. Решения этой системы интерпретируются как векторы счёта допустимых последовательностей срабатывания переходов и поэтому должны быть неотрицательными целыми числами, что обуславливает специфику задачи. Методы решения таких систем представлены в [4,5]. К сожалению, все известные методы имеют асимптотически экспоненциальную сложность, что делает трудным их применение для анализа реальных систем.

Целью настоящей работы является построение композиционных методов для решения фундаментального уравнения сетей Петри, позволяющих получить существенное ускорение вычислений. Действительно, обычно модели сложных систем собирают из моделей их компонентов. Кроме того, в случаях, когда композиция модели из подсетей не задана, предлагается применить методы декомпозиции сетей Петри, представленные в [6,7], чтобы разбить заданную сеть Петри на множество её функциональных подсетей. Ранее аналогичный подход был успешно применён при вычислении инвариантов [8,9].

Полученное ускорение вычислений оценивается экспоненциальной функцией. Так как размерность подсетей, как правило, существенно меньше размерности всей сети фактические ускорения вычислений могут быть весьма значительными, что подтверждено результатами применения композиционных методов для верификации телекоммуникационных протоколов [10,11].

Следует отметить, что задача нахождения инвариантов соответствует проверке целостности баз знаний, представленных сетями Петри [2,12], а разрешимость фундаментального уравнения позволяет определить выполнимость целевых функций; при этом множество решений является основой для построения искомой последовательности вывода.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

*Сеть Петри* – это четвёрка  $N = (P, T, F, W)$ , где  $P = \{p\}$  – конечное множество вершин, именуемых позициями,  $T = \{t\}$  – конечное множество вершин, именуемых переходами; отношение  $F \subseteq P \times T \cup T \times P$  определяет множество дуг, соединяющих пози-

ции и переходы, а отношение  $W : F \rightarrow N$  задаёт кратности дуг;  $N$  обозначает множество натуральных чисел. Таким образом, сеть Петри представляет собой двудольный ориентированный граф.

*Двойственная сеть Петри* – это сеть Петри, у которой позиции заменены переходами, а переходы – позициями. Примеры сети Петри и её двойственной сети представлены на Рис. 1 и Рис. 2 соответственно.

*Маркировка сети* – это отображение  $\mu : P \rightarrow N_0$ , определяющее распределение динамических элементов, именуемых фишками, на множестве позиций;  $N_0$  – множество неотрицательных целых чисел  $N_0 = N \cup \{0\}$ . *Маркированная сеть Петри* – это пара  $M = (N, \mu_0)$ , либо пятёрка  $M = (P, T, F, W, \mu_0)$ , где  $\mu_0$  – её начальная маркировка.

Фундаментальное уравнение сети Петри (уравнение Мураты) [1] может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{x} \cdot A = \Delta \bar{\mu}, \quad (1)$$

где  $\Delta \bar{\mu} = \bar{\mu} - \bar{\mu}_0$ ,  $\bar{x}$  – вектор счёта срабатываний переходов,  $A$  – транспонированная матрица инцидентности, либо матрица инцидентности двойственной сети Петри. Отметим, что каждое уравнение системы (1) соответствует переходу двойственной сети Петри.

Известно [1], что разрешимость фундаментального уравнения в неотрицательных целых числах является необходимым условием достижимости заданной маркировки. Решения системы (1) используются для построения искомым последовательностей срабатывания переходов.

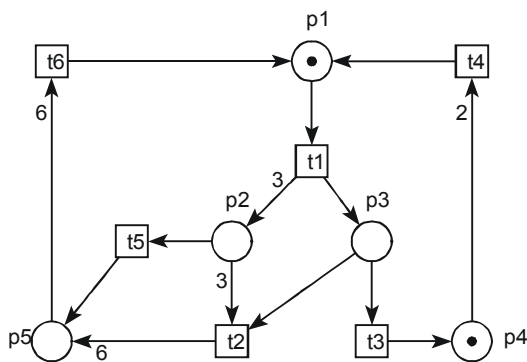


Рис. 1. Сеть Петри  $N_1$

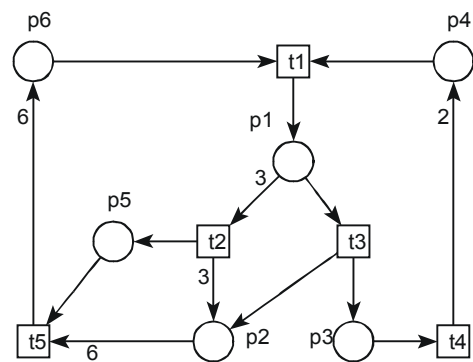


Рис. 2. Двойственная сеть Петри  $\tilde{N}_1$

В соответствии с [4] будем представлять общее решение однородной системы как линейную комбинацию базисных решений с неотрицательными целыми коэффициентами. Отметим, что базис состоит из минимальных в целой неотрицательной решётке решений системы. В отличие от классической теории линейных систем для представ-

ления общего неотрицательного целого решения неоднородной системы необходимо использовать не одно произвольное, а множество минимальных частных решений.

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОДСЕТИ

*Сеть с входными и выходными позициями* – это сеть Петри, в которой указаны специальные подмножества входных и выходных позиций.

*Функциональная сеть* – это тройка  $Z = (N, X, Y)$ , где  $N$  – сеть Петри,  $X \subseteq P$  – множество входных позиций,  $Y \subseteq P$  – множество выходных позиций, при этом множества входных и выходных позиций не пересекаются  $X \cap Y = \emptyset$ , и, кроме того, входные позиции не имеют входящих дуг, а выходные позиции не имеют исходящих дуг:  $\forall p \in X: \bullet p = \emptyset$ ,  $\forall p \in Y: p \bullet = \emptyset$ . Далее позиции множества  $Q = P \setminus (X \cup Y)$  будем называть *внутренними*, а позиции множества  $C = X \cup Y$  – *контактными*.

Сеть Петри  $N' = (P', T', F', W')$  является *подсетью* сети  $N$ , если  $P' \subseteq P, T' \subseteq T, F' \subseteq F, W'(F') = W(F')$ .

Функциональную сеть  $Z = (N', X, Y)$  будем называть *функциональной подсетью* сети  $N$  и обозначать  $Z \succ N$ , если  $N'$  является подсетью  $N$  и, кроме того,  $Z$  связана с оставшейся частью сети только посредством дуг, инцидентных контактными позициям, таким образом, что входным позициям инцидентны только входящие дуги, а выходным – только исходящие:

$$\begin{aligned} \forall p \in X: \{(p, t) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset, \quad \forall p \in Y: \{(t, p) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset, \\ \forall e \in Q: \{(p, t) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset \wedge \{(t, p) \mid t \in T \setminus T'\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Функциональная подсеть  $Z' \succ N$  является *минимальной*, если она не содержит другие функциональные подсети исходной сети Петри  $N$ .

Сеть, порождённую указанным подмножеством переходов  $R \subseteq T$ , будем обозначать  $B(R)$ .

Проблемы декомпозиции сетей Петри в функциональные подсети были исследованы в [6,7]. Инварианты функциональных подсетей изучены в [8,9]. Перечислим основные *свойства функциональных подсетей*:

1. Функциональная подсеть порождается множеством своих переходов.
2. Множество минимальных функциональных подсетей  $\mathfrak{Z} = \{Z^j\}$ ,  $Z^j \succ N$  определяет разбиение множества переходов  $T$  на непересекающиеся подмножества  $T^j$ , такие что  $T = \bigcup_j T^j$ ,  $T^j \cap T^k = \emptyset$ ,  $j \neq k$ .
3. Каждая функциональная сеть  $Z'$  произвольной заданной сети Петри  $N$  является суммой (объединением) конечного числа минимальных функциональных

подсетей; объединение подсетей может быть определено с помощью операции слияния контактных позиций.

4. Каждая контактная позиция в декомпозиции сети Петри имеет не более одной входящей минимальной функциональной подсети и не более одной исходящей минимальной функциональной подсети.
5. Сеть Петри  $N$  инвариантна тогда и только тогда, когда инвариантны все её минимальные функциональные подсети  $Z^j$ ,  $Z^j \succ N$  и существует общий ненулевой инвариант контактных позиций.

Эффективный алгоритм декомпозиции заданной сети Петри на минимальные функциональные подсети сложности пропорциональной кубу количества вершин представлен в [6,7].

## ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПОДСЕТЕЙ

Рассмотрим структуру системы (1):

$$\bar{x} \cdot A = \Delta \bar{\mu}.$$

Каждое уравнение  $L_i: \bar{x} \cdot A^i = \Delta \mu_i$ , где  $A^i$  обозначает  $i$ -й столбец матрицы  $A$ , соответствует переходу  $t_i$  (двойственной сети). Уравнение содержит термы для всех инцидентных позиций. При этом коэффициенты равны весам дуг и термы для входных позиций имеют знак минус, а для выходных позиций – плюс.

Таким образом, система (1) может быть представлена как

$$L = L_1 \wedge L_2 \wedge \dots \wedge L_n \quad (2)$$

**Теорема 1.** Решение  $\bar{x}'$  фундаментального уравнения сети Петри  $N$  является решением фундаментального уравнения каждой из её функциональных подсетей.

*Доказательство.* Так как  $\bar{x}'$  является решением фундаментального уравнения для сети Петри  $N$ , то  $\bar{x}'$  является целым неотрицательным решением системы (2) и, следовательно,  $\bar{x}'$  является целым неотрицательным решением каждого из уравнений  $L_i$ . Таким образом,  $\bar{x}'$  является решением произвольного подмножества  $\{L_i\}$ .

В соответствии со свойством 1), функциональная подсеть  $Z'$ ,  $Z' \succ N$  порождается множеством своих переходов  $T'$ . Тогда уравнение, соответствующее переходу подсети имеет ту же самую форму  $L_i$ , что и для всей сети, так как подсеть содержит все инцидентные позиции исходной сети.

Таким образом, система, представляющая фундаментальное уравнение функциональной подсети  $Z'$ ,  $Z' \succ N$  является подмножеством множества  $\{L_i\}$ , и вектор  $\bar{x}'$  является её решением. Следовательно,  $\bar{x}'$  является решением фундаментального уравнения для функциональной подсети  $Z'$ . Произвольность выбора подсети  $Z' \succ N$  в приведенных рассуждениях доказывает теорему.  $\square$

**Теорема 2.** Фундаментальное уравнение сети Петри разрешимо тогда и только тогда, когда оно разрешимо для каждой функциональной подсети и существует общее решение для контактных позиций.

*Доказательство.* Используем эквивалентные преобразования систем, чтобы не доказывать отдельно необходимые и достаточные условия. В соответствии со свойством 2), множество минимальных функциональных подсетей  $\mathfrak{Z} = \{Z^j\}$ ,  $Z^j \succ N$  произвольной сети Петри  $N$  задаёт разбиение множества переходов  $T$  на непересекающиеся подмножества  $T^j$ . Пусть количество минимальных функциональных подсетей равно  $k$ . Как было отмечено в доказательстве теоремы 1, уравнения содержат термы для всех инцидентных позиций. Тогда:

$$L \Leftrightarrow L^1 \wedge L^2 \wedge \dots \wedge L^k, \quad (3)$$

где  $L^j$  – подсистема для минимальной функциональной подсети  $Z^j$ ,  $Z^j \succ N$ . Заметим, что если  $L^j$  не имеет решения, то  $L$  также не имеет решения.

Пусть общее решение для каждой функциональной подсети  $Z^j$  имеет вид:

$$\bar{x}^j = \bar{x}'^j + \bar{u}^j \cdot G^j, \quad (4)$$

где  $\bar{u}^j \cdot G^j$  – общее решение соответствующей однородной системы, а  $\bar{x}'^j \in X'^j$ , где  $X'^j$  – множество минимальных частных решений неоднородной системы уравнений. В соответствии с 3):

$$L \Leftrightarrow \bar{x} = \bar{x}'^1 + \bar{u}^1 \cdot G^1 = \bar{x}'^2 + \bar{u}^2 \cdot G^2 = \dots = \bar{x}'^k + \bar{u}^k \cdot G^k.$$

Тогда система

$$\bar{x} = \bar{x}'^1 + \bar{u}^1 \cdot G^1 = \bar{x}'^2 + \bar{u}^2 \cdot G^2 = \dots = \bar{x}'^k + \bar{u}^k \cdot G^k \quad (5)$$

эквивалентна исходной системе уравнений (1). Далее покажем, что решение системы (5) требует существенно меньшего количества уравнений. Рассмотрим множество позиций сети Петри  $N$  с множеством минимальных функциональных подсетей  $\{Z^j \mid Z^j \succ N\}$ :

$$P = Q^1 \cup Q^2 \cup \dots \cup Q^k \cup C,$$

где  $Q^j$  – множество внутренних позиций подсети  $Z^j$ , а  $C$  – множество контактных позиций. В соответствии с определением каждая внутренняя позиция  $p \in Q^j$  инцидентна только переходам множества  $T^j$ . Поэтому  $x_p$ , соответствующий этой позиции, содержится только в одной системе  $L^j$ . Следовательно, необходимо решить только уравнения для контактных позиций множества  $C$ .

Построим уравнения для контактных позиций сети  $p \in C$ , так как только они инцидентны более чем одной подсети. В соответствии со свойством 4), каждая контактная позиция  $p \in C$  инцидентна не более чем двум функциональным подсетям. Таким образом, имеем уравнения вида:

$$\bar{x}'_p{}^j + \bar{u}^j \cdot G_p^j = \bar{x}'_p{}^l + \bar{u}^l \cdot G_p^l, \quad (6)$$

где  $j, l$  – номера минимальных функциональных подсетей, инцидентных контактной позиции  $p \in C$ , а  $G_p^j$  – столбец матрицы  $G^j$ , соответствующий позиции  $p$ . Уравнения (6) могут быть представлены в виде:

$$\bar{u}^j \cdot G_p^j - \bar{u}^l \cdot G_p^l = \bar{x}'_p{}^l - \bar{x}'_p{}^j.$$

Таким образом, система

$$\begin{cases} x_p = \bar{x}'_p{}^j + \bar{u}^j \cdot G_p^j, & p \in Q^j \vee p \in C, \\ \bar{u}^j \cdot G_p^j - \bar{u}^l \cdot G_p^l = \bar{x}'_p{}^l - \bar{x}'_p{}^j, & p \in C, Z^i = \bullet p, Z^j = p^\bullet, \end{cases} \quad (7)$$

эквивалентна исходной системе (1). Этот факт и завершает доказательство теоремы.  $\square$

Заметим, что в двух случаях, указанных в доказательстве, в соответствии с (7), необходимо решить линейную неоднородную систему уравнений.

**Следствие 1.** Для решения фундаментального уравнения сети Петри можно решить фундаментальные уравнения её минимальных функциональных подсетей, а затем найти общее решение для контактных позиций.

**Следствие 2.** Теорема 2 верна также для произвольного множества функциональных подсетей, задающего разбиение множества переходов сети Петри.

## КОМПОЗИЦИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

На основе теоремы 2 и её следствий можно сформулировать композиционный метод решения фундаментального уравнения сети Петри:

**Этап 0.** Построить двойственную сеть Петри.

**Этап 1.** Выполнить декомпозицию двойственной сети на функциональные подсети.

**Этап 2.** Решить фундаментальное уравнение для каждой из подсетей – построить общее решение (4) неоднородной системы.

**Этап 3.** Выполнить композицию подсетей – найти общее решение (6) для множества контактных позиций.

**Этап 4.** Восстановить решения исходной системы (1).

Заметим, что этапы 2,3 состоят в решении систем линейных неоднородных диофантовых уравнений на множестве целых неотрицательных чисел. Для этих целей могут быть использованы методы, описанные в [4,5].

Рассмотрим более подробно особенности выполнения этапов 3,4, представив систему уравнений в матричной форме. Выпишем из системы (7) уравнения для контактных позиций

$$\bar{u}^j \cdot G_i^j - \bar{u}^l \cdot G_i^l = \bar{x}'_i{}^l - \bar{x}'_i{}^j.$$

Либо в матричной форме

$$\left\| \begin{array}{c} \bar{u}^j \\ \bar{u}^l \end{array} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} G_i^j \\ -G_i^l \end{array} \right\| = \bar{b}_i', \quad \bar{b}_i' = \bar{x}^l - \bar{x}^j$$

Занумеруем все переменные  $\bar{u}^j$  таким образом, чтобы получить объединённый вектор

$$\bar{u} = \left\| \begin{array}{c} \bar{u}^1 \\ \bar{u}^2 \\ \dots \\ \bar{u}^k \end{array} \right\|$$

и скомпонуем матрицы  $G_i^j$ ,  $-G_i^l$  в объединённую матрицу  $K$ . Тогда получим систему

$$\bar{u} \cdot K = \bar{b}'.$$

Полученная система имеет форму (1), следовательно, её общее решение может быть представлено в форме (4):

$$\bar{u} = \bar{u}' + \bar{v} \cdot J. \quad (8)$$

Построим объединённую матрицу  $G$  решений (4) системы (1) для всех функциональных подсетей (значения для контактных позиций выберем в соответствии с решением для любой из инцидентных подсетей) таким образом, что

$$\bar{x} = \bar{x}' + \bar{u} \cdot G. \quad (9)$$

Подставим (8) в (9):

$$\bar{x} = \bar{x}' + (\bar{u}' + \bar{v} \cdot J) \cdot G = \bar{x}' + \bar{u}' \cdot G + \bar{v} \cdot J \cdot G.$$

Тогда

$$\bar{x} = \bar{x}'' + \bar{v} \cdot H, \quad \bar{x}'' = \bar{x}' + \bar{u}' \cdot G, \quad H = J \cdot G. \quad (10)$$

Так как были использованы только эквивалентные преобразования, представленные рассуждения доказывают следующую теорему.

**Теорема 3.** Выражения (10) представляют общее решение фундаментального уравнения (1).

Оценим ускорение вычислений при вычислении инвариантов в процессе композиции. Пусть  $r$  – максимальное количество среди контактных позиций и позиций функциональных подсетей  $r = \max(|C|, \max_{Z^j \times N} |P^j|)$ . Заметим, что  $r \leq n$ . Тогда сложность решения фундаментального уравнения для подсети можно оценить как  $\sim 2^r$ , так как сложность декомпозиции в соответствии с [6,7] полиномиальная и может быть опущена.

Тогда, ускорение вычислений оценивается как

$$\frac{2^n}{2^r} = 2^{n-r}. \quad (11)$$

Таким образом, полученное ускорение вычислений является экспоненциальным.

Заметим, что экспоненциальное ускорение вычислений, представленное выражением (11) также верно в случае, когда общие решения для функциональных подсетей и контактных позиций содержат более одного минимального частного решения. Действительно, пусть фундаментальное уравнение каждой из функциональных подсетей содержит не более  $l$  минимальных частных решений. Тогда в процессе вычисления об-

шего решения для контактных позиций следует решить  $l^2$  систем, а полиномиальный сомножитель может быть опущен в сравнительных оценках экспоненциальных функций.

### ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Проверим достижимость маркировки  $\bar{\mu} = (0, 2, 1, 0, 4)$  в сети Петри  $N_1$  (Рис. 1). Тогда  $\Delta\bar{\mu} = (-1, 2, 1, -1, 4)$ .

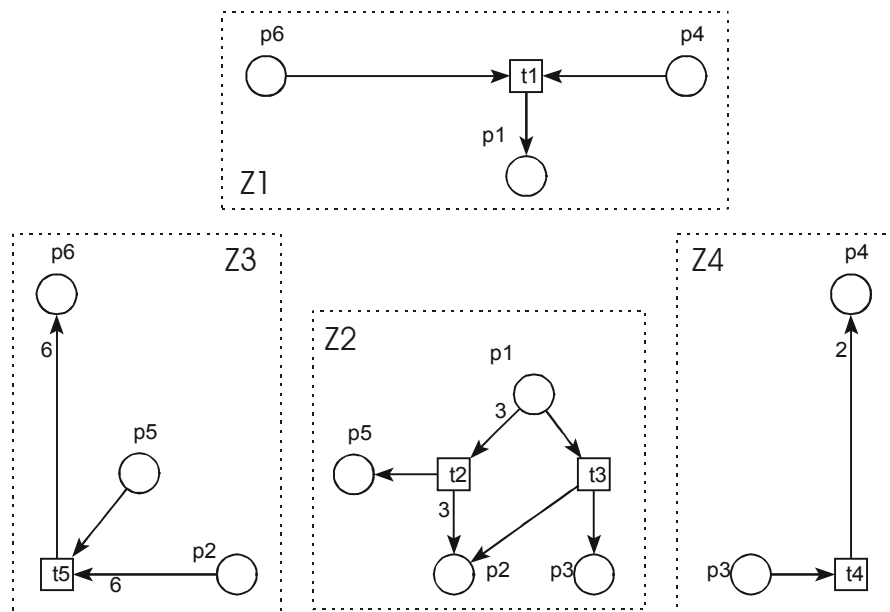


Рис. 3. Декомпозиция двойственной сети Петри  $\tilde{N}_1$

**Этап 0.** Двойственная сеть Петри  $\tilde{N}_1$  представлена на Рис. 2.

**Этап 1.** Декомпозиция двойственной сети содержит четыре минимальных функциональных подсети  $Z^1, Z^2, Z^3, Z^4$ , полностью определённых множествами своих переходов:  $T^1 = \{t_1\}$ ,  $T^2 = \{t_2, t_3\}$ ,  $T^3 = \{t_5\}$ ,  $T^4 = \{t_4\}$  и представленных на Рис. 3.

**Этап 2.**

$$Z^1: \quad \begin{cases} -x_1 + x_4 + x_6 = -1; \end{cases} \quad \bar{x} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (u_1^1, u_2^1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Z^2: \quad \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1; \end{cases} \quad \bar{x} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0) + (u_1^2, u_2^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



$$Z^3: \quad \{6x_2 + x_5 - 6x_6 = 4; \quad \bar{x} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4 \ 0) + (u_1^3, u_2^3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Z^4: \quad \{x_3 - 2x_4 = -1; \quad \bar{x} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0) + (u_1^4) \cdot (0 \ 0 \ 2 \ 1 \ 0 \ 0).$$

**Этап 3.**

$$\begin{cases} u_1^1 + u_2^1 - u_1^2 - u_2^2 = 0, \\ u_2^2 - u_2^3 = 0, \\ u_1^2 - 2u_1^4 = 1, \\ u_1^1 - u_1^4 = 1, \\ 3u_1^2 - 6u_1^3 = 3, \\ u_2^1 - u_1^3 - u_2^3 = 0; \end{cases} \quad \begin{aligned} \bar{u} &= (u_1^1 \ u_2^1 \ u_1^2 \ u_2^2 \ u_1^3 \ u_2^3 \ u_1^4) = \\ &= (1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) + (v_1, v_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Этап 4.**

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\bar{x} = (2 \ 0 \ 1 \ 1 \ 4 \ 0) + (v_1, v_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что общее решение однородной системы уравнений представляет собой  $t$ -инвариант сети Петри. По минимальному решению  $\bar{x}' = (2, 0, 1, 1, 4, 0)$  можно построить допустимую последовательность срабатываний переходов  $\sigma = t_1 t_5 t_5 t_5 t_3 t_4 t_1 t_5$ . Таким образом, маркировка  $\bar{\mu} = (0, 2, 1, 0, 4)$  достижима в сети  $N_1$ .

Следует отметить, что в этом небольшом примере все позиции являются контактными, поэтому ускорение вычислений не рассматривается. Для моделей реальных систем полученные ускорения значительны [10, 11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сложность решения фундаментального уравнения сети Петри в общем случае экспоненциальна, что делает практически неосуществимым анализ моделей большой размерности. Методы представленные в настоящей работе позволяет ускорить процесс решения фундаментального уравнения. Они основаны на композиции сети Петри из множества функциональных подсетей. Полученное ускорение вычислений экспоненциально по отношению к количеству вершин исходной сети.

Изученные методы могут быть применены при организации процессов вывода на базах знаний, представленных сетями Петри.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мурата Т. Сети Петри: Свойства, анализ, приложения // ТИИЭР, т. 77, №4, 1989, с. 41-85.
2. Girault C., Volk R. Petri nets for systems engineering – A guide to modelling, verification and applications, Springer-Verlag, 2003.
3. Cortadella J., Kishinevsky M., Kondratyev A., Lavagno L., Yakovlev A. Logic synthesis of asynchronous controllers and interfaces, Springer-Verlag, 2002.
4. Крытый С.Л. О некоторых методах решения и критериях совместимости систем линейных диофантовых уравнений в области натуральных чисел // Кибернетика и системный анализ, 1999, № 4, с. 12-36.
5. Зайцев Д.А. К вопросу о вычислительной сложности метода Тудика // Искусственный интеллект.- 2004, №1, с. 29-37.
6. Zaitsev D.A. Subnets with Input and Output Places // Petri Net Newsletter, Vol. 64, April 2003, 3-6. Cover Picture Story.
7. Зайцев Д.А. Декомпозиция сетей Петри // Кибернетика и системный анализ, №5, 2004, 19с.
8. Зайцев Д.А. Инварианты функциональных подсетей // Труды Одесской национальной академии связи им. А.С.Попова, №4, 2003, с. 57-63.
9. Zaitsev D.A. Decomposition-based calculation of Petri net invariants // Proceedings of Token based computing Workshop of the 25-th International conference on application and theory of Petri nets, Bologna, Italy, June 21-25, 2004, pp. 79-83.
10. Zaitsev D.A. Verification of Protocol ECMA with Decomposition of Petri Net Model // Proceedings of The International Conference on Cybernetics and Information Technologies, Systems and Applications, Orlando, Florida, USA, July 21-25, 2004.
11. Zaitsev D.A. Verification of protocol TCP via decomposition of Petri net model into functional subnets // Proceedings of the Poster session of 12th Annual Meeting of the IEEE / ACM International Symposium on Modeling, Analysis, and Simulation of Computer and Telecommunication Systems, October 5-7, 2004, Volendam, Netherlands, p. 73-75.
12. Liu N.K., Dillon J. Detection of consistency and completeness in expert systems using numerical Petri nets // Joint Artif. Intell. Conf., Sydney, November 2-4, 1987, pp. 119-134.